DEVOIR SURVEILLE N° 1 - MPSI - 2h30min

Vous êtes invités dans ce devoir (comme dans tous les devoirs) à porter une attention particulière : à la propreté et à la clarté de votre copie

- **les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées .**
- **les numéros des questions doivent être indiqués clairement .**
- **les réponses aux questions doivent être séparées par un trait sur toute la largeur de la copie ;**
- **toute référence à un résultat prouvé auparavant doit être indiquée (par 2a , etc.) ;**
- **les résultats importants doivent être encadrés.**

à la rédaction : faites des phrases et soyez rigoureux dans vos raisonnements.

Exercice 1

1. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.
3. E ayant n éléments, quel est le nombre des éléments de $\mathscr{P}(E)$.

   (démonstration par récurrence :à l'étape $n+1$ considérer l'ensemble E privé de l'un de ses éléments)

Exercice 2

Soient E,F et G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.
On pose $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est injective, f l'est aussi.
2. Montrer que si, en outre, f est surjective,alors g est injective.

Exercice 3

1. Soit l'équation : $(E)\ \ z^5 - 1 = 0$.
   Vérifier que les racines de (E) sont : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$
3. (a) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par :

   $$z + \frac{1}{z} = u$$

   (b) De la question précédente, déduire les valeurs de :

   $$\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}$$

Exercice 4

Soit ω une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$

Indication : Pour $\omega \neq 1$ calculer $(1-\omega)S$

DEVOIR SURVEILLE N° 1 - MPSI - 2h30min

Vous êtes invités dans ce devoir (comme dans tous les devoirs) à porter une attention particulière : à la propreté et à la clarté de votre copie

- **les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées .**
- **les numéros des questions doivent être indiqués clairement .**
- **les réponses aux questions doivent être séparées par un trait sur toute la largeur de la copie ;**
- **toute référence à un résultat prouvé auparavant doit être indiquée (par 2a , etc.) ;**
- **les résultats importants doivent être encadrés.**

à la rédaction : faites des phrases et soyez rigoureux dans vos raisonnements.

Exercice 1

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation R par :

$$z\mathscr{R}z' \iff |z| = |z'|$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

Soit E un ensemble et A une de ses parties, l'application φ_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in A \\ 0 & si \;\; x \in A^C \end{cases}$$

est appelé fonction caractéristique de la partie A de E

1. Démontrer que, A et B étant deux parties de E non vides, pour tout $x \in E$:
   - $\varphi_{E \setminus A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.
   - $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.
   - $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.
2. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ et $\{0, 1\}^E$ sont en bijection.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1} \qquad ; \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^{kp},\; p \in \mathbb{Z} \qquad ; \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \complement_n^k \omega^k$$

Exercice 4

Soit un réel $\theta \in]0, 2\pi[$ et la suite complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = e^{i\theta} z_n + \frac{1}{2}(1 - e^{i\theta}).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 0}$, définie par $w_n = z_n - \dfrac{1}{2}$, est une suite géométrique.
2. En déduire , pour tout entier $n \geq 0$, une expression de w_n puis de z_n en fonction de n et de θ .
3. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la somme $\quad S_n(\theta) = z_0 + z_1 + \cdots + z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$.

   Montrer que :

$$S_n(\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{e^{in\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

4. On pose , pour tout entier $n \geq 0$:

$$T_n(\theta) = \frac{S_n(\theta)}{n+1} = \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_n}{n+1}.$$

Calculer la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left| T_n(\theta) - \frac{1}{2} \right| = 0.$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$\frac{(z+i)^3}{(z-i)^3} + \frac{(z+i)^2}{(z-i)^2} + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$$

DEVOIR SURVEILLE N° 1 - MPSI - 2h30min

Vous êtes invités dans ce devoir (comme dans tous les devoirs) à porter une attention particulière : à la propreté et à la clarté de votre copie

- **les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées .**
- **les numéros des questions doivent être indiqués clairement .**
- **les réponses aux questions doivent être séparées par un trait sur toute la largeur de la copie ;**
- **toute référence à un résultat prouvé auparavant doit être indiquée (par 2a , etc.) ;**
- **les résultats importants doivent être encadrés.**

à la rédaction : faites des phrases et soyez rigoureux dans vos raisonnements.

Exercice 1

Dans le plan complexe on considère les points $A(2+4i)$, $B(3-3i)$, $C(4)$ et $D(-1+5i)$.
Montrer que ces quatres points sont cocycliques.

Exercice 2

Soient E,F et G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.
On pose $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est injective, f l'est aussi.
2. Montrer que si, en outre, f est surjective,alors g est injective.

Exercice 3

1. Soit l'équation : $(E)\ \ z^5 - 1 = 0$.
   Vérifier que les racines de (E) sont : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$
3. (a) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par :

$$z + \frac{1}{z} = u$$

   (b) De la question précédente, déduire les valeurs de :

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}$$

Exercice 4

Soit ω une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$

Indication : Pour $\omega \neq 1$ calculer $(1-\omega)S$